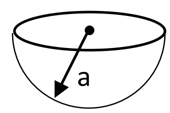
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 2

Problema 1. Un cascaron semiesférico de radio a, tiene una densidad de carga superficial uniforme σ. Encuentre el campo eléctrico en el centro de la semiesfera. Luego la fuerza que se ejercerá sobre una partícula de carga $-2e$ si estuviera en el centro de la semiesfera.



La expresión del campo eléctrico producido por una distribución de carga bidimensional es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma}{|\vec{r_0} - \vec{r}|^3} (\vec{r_0} - \vec{r})\, dA$$

Por simplificación, pondremos el origen de nuestro sistema de referencia en el centro de la semiesfera. Con esto tenemos:
Donde estamos calculando el campo eléctrico: $\vec{r_0} = \vec{0}$
Los puntos donde está la distribución de carga: $\vec{r} = a\cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{\imath} + a\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{\jmath} + a\cos(\phi)\,\hat{k}$
La parametrización anterior es trivial, ya que sabemos que es una semiesfera.
El diferencial: $dA = a^2 \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta$
La distancia entre vectores: $|\vec{r_0} - \vec{r}|^3 = a^3$
Reemplazando en la definición de campo eléctrico (primera ecuación)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{a^3} \left(-a\cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{\imath} - a\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{\jmath} - a\cos(\phi)\,\hat{k}\right) a^2 \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta$$

Factorizando términos comunes y simplificando

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\sin^2(\phi)\,\hat{\imath} + \sin(\theta)\sin^2(\phi)\,\hat{\jmath} + \cos(\phi)\sin(\phi)\,\hat{k}\, d\phi\, d\theta$$

Separamos cada componente

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\sin^2(\phi)\,\hat{\imath}\,d\phi\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\sin^2(\phi)\,\hat{\jmath}\,d\phi\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\phi)\sin(\phi)\,\hat{k}\,d\phi\,d\theta\right)$$

Por periodicidad del seno y del coseno vemos que la primera y segunda integrales son cero. La tercera integral se integra por cambio de variable (sustitución)

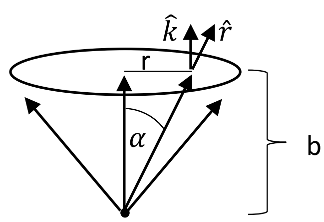
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\phi)\sin(\phi)\,\hat{k}\,d\phi\,d\theta = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\hat{k}$$

La fuerza sobre la partícula se puede obtener a partir del campo eléctrico

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Problema 2. (a) Una carga puntual q está ubicada a una distancia b de un disco de radio R sobre el eje de simetría del disco. Calcule por integración directa el flujo a través del disco, debido al campo eléctrico generado por la carga.
(b) Suponga que la carga q se ubica en el centro de un cilindro de largo L y radio R sobre el eje de simetría del cilindro. Calcule, usando (a), el flujo a través del manto del cilindro.
(c) Si se retira la carga del cilindro, dejándola fuera del mismo y sobre el eje de simetría a una distancia h de la tapa más cercana, calcule el flujo a través del cilindro.

(a)



El flujo eléctrico se define como

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Como es un anillo, $d\vec{A}$ lo parametrizamos como una circunferencia

$$d\vec{A} = r\hat{k}\,dr\,d\theta$$

El campo eléctrico generado por la carga puntual en el disco es $\left(\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r_0}-\vec{r}|^2}\hat{r}\right)$:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(b^2+r^2)}\hat{r}$$

Metiendo todo a la integral para calcular el flujo

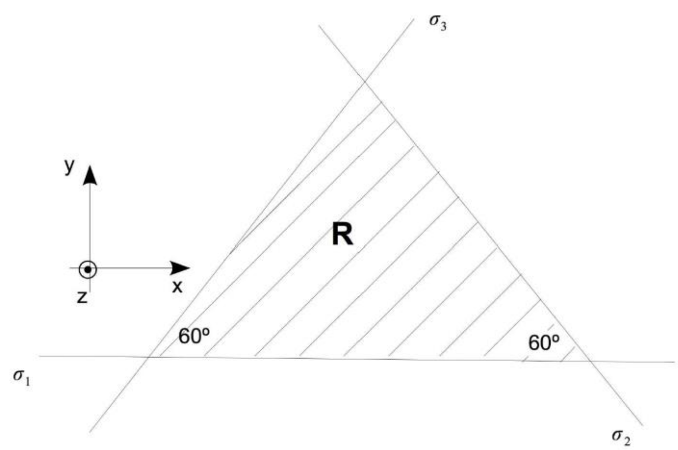
$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(b^2+r^2)}\hat{r}\cdot r\hat{k}\,dr\,d\theta$$

Vemos por el diagrama que $\hat{r}\cdot\hat{k} = \cos(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{b^2+r^2}}$

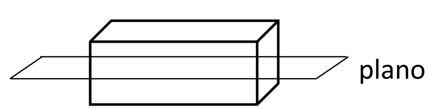
$$\Phi = \frac{qb}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r}{(b^2+r^2)^{3/2}}dr\,d\theta = \frac{qb}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r}{(b^2+r^2)^{3/2}}dr = \frac{qb}{4\varepsilon_0}\left(1-\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}}\right)$$

La última integral se resuelve por cambio de variable

Problema 3. Se tienen tres planos infinitos que se intersectan en un ángulo de 60° con densidad de carga uniforme σ_1, σ_2 y σ_3 como indica la figura. Suponiendo que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y $\sigma_3 = 2\sigma$. Calcule el vector campo eléctrico en la región R en términos de σ.



Primero consideremos uno de los planos infinitos. Aplicamos la ley de Gauss a ese plano considerando un área de integración una caja con dos de sus lados paralelos al plano y el interior de la caja debe contener una región del plano, como se muestra en la figura



Por simetría se debe tener que el campo eléctrico apunta perpendicular al plano. Usando la ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

El lado izquierdo de la ecuación

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(2\int \hat{k} \cdot \hat{k} dA + 2\int \hat{\imath} \cdot \hat{k} dA + 2\int \hat{\jmath} \cdot \hat{k} dA\right) = 2EA$$

Juntando lado izquierdo y derecho tenemos

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Con eso, geométricamente vemos que para el plano 1: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\jmath}$, para el plano 2: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\cos(30°)\,\hat{\imath} - \sin(30°)\,\hat{\jmath})$, mientras que para el plano 3 tenemos: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\cos(30°)\,\hat{\imath} - \sin(30°)\,\hat{\jmath})$

Ahora por principio de superposición sumamos los tres campos eléctricos para obtener el total

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\jmath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\cos(30°)\,\hat{\imath} - \sin(30°)\,\hat{\jmath}) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\cos(30°)\,\hat{\imath} - \sin(30°)\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos(30°)\,\hat{\imath} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin(30°)\right)\hat{\jmath}$$